$A \times B = \{x, y\} : x \in A \wedge y \in B\}$

$(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$

$(x, y) \notin A \times B \Rightarrow x \notin A \vee y \notin B$

(α, B) ?

i) $(A \times B) \cap (\Gamma \times \Delta) = (A \cap \Gamma) \times (B \cap \Delta)$

ii) $(A \times B)(\Gamma \times \Delta) \subseteq (A \cup \Gamma) \times (B \cup \Delta)$

iii) $(A \times B) - (\Gamma \times \Delta) = [A \times (B - \Delta)] \cup [(A - \Gamma$

(x, y) τυχον ζευγος

$(x, y) \in (A \times B) \cap (\Gamma \times \Delta) \Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y)$
$\in \Gamma \times \Delta \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in \Gamma \wedge y \in \Delta)$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in \Gamma) \wedge (y \in B \wedge y \in \Delta) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in A \cap \Gamma \wedge y \in B \cap \Delta \Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap \Gamma) \times (B \cap$

(x, y) τυχον:

$(x, y) \in (A \times B) \cup (\Gamma \times \Delta) \Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \vee$
$(x, y) \in \Gamma \times \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in \Gamma \wedge y \in \Delta) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [(x \in A \wedge y \in B) \vee x \in \Gamma] \wedge$
$[(x \in A \wedge y \in B) \vee y \in \Delta]$

$$[(x \in A \lor x \in \Gamma) \land (y \in B \lor x \in \Gamma)] \land$$

$$[(x \in A \lor y \in \Delta) \land (y \in B \lor y \in \Delta)]$$

$$\Rightarrow (x \in A \lor x \in \Gamma) \land (y \in B \lor y \in \Delta)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cup \Gamma \land y \in B \cup \Delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \cup \Gamma) \times (B \cup \Delta)$$

$$(a, \beta) = (a', \beta') \Leftrightarrow a = a' \land \beta = \beta'$$

$$(a, \beta) = \{\{a\}, \{a, \beta\}\}$$

$$(a, \beta) = (a', \beta') \Leftrightarrow \{\{a\}, \{a, \beta\}\} =$$

$$= \{\{a'\}, \{a', \beta'\}\}$$

Άρα $\{a\} \in \{\{a'\}, \{a', \beta'\}\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \{a\} = \{a'\} \lor \{a\} = \{a', \beta'\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = a'$$

$P(E) = \{ x : x \subseteq E \}$

$e = \{\{1, 2, 3\}, \{4, 2, 7\}, \varnothing\}$

$\cup e = \{1, 2, 3, 4, 7\}$

$\cup e = \{ x : (\exists X \in e) : x \in X \}$

$\cap e = \{ x : (\forall X \in e)\, x \in X \}$

$\cap e = \varnothing$

$E = \mathbb{N} \quad e = \{ \mathbb{N}_0, \mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2 \}$

$\mathbb{N}_0 = \{ x \in \mathbb{N} : x = 3k, \ k \in \mathbb{N} \} \subseteq \mathbb{N}$

$\mathbb{N}_1 = \{ x \in \mathbb{N} : x = 3k+1, \ k \in \mathbb{N} \} \subseteq \mathbb{N}$

$\mathbb{N}_2 = \{ x : x \in \mathbb{N} : x = 3k+2, \ k \in \mathbb{N} \} \subseteq \mathbb{N}$

$$\underbrace{A = \{ 1, 4, 7, 10, \ldots, 100, 101 \}}$$

$A \subseteq \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \qquad \tilde{e} = \{ \mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2 \}$

$* \; \epsilon \cup = \epsilon$

$\cup P(\epsilon) \supseteq \epsilon$

$x \in \epsilon \Rightarrow x \in \{x\}$

$\{x\} \in P(\epsilon) \Longrightarrow x \in \cup P(\epsilon)$

e συλλογή κάλυψη του $X \Rightarrow \cup e \supseteq X$

e διαμέριση ενός συνόλου $E \iff$

$\iff \begin{cases} 1) \cup e = E \\ 2) \varnothing \notin e \\ 3) \forall\, X, Y \in e \\ \quad X \cap Y = \varnothing \\ \quad \text{αν } X \neq Y \end{cases}$

$E = \{ a, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta \}$

διαμερ. λύση $e = \{ \{a\}, \{\beta, \gamma\}, \{\zeta\}, \{\delta, \zeta, \eta, \epsilon\} \}$

- αν η ένωσή της είναι όλα τα στοιχεία
- ανά δύο τα σύνολα να είναι ξένα
- να μην [illegible] είναι στοιχείο το $\varnothing$

$x \in \bigcap \mathcal{C} \iff (\forall X \in \mathcal{C})\, x \in X$

$x \notin \bigcup \mathcal{C} \iff (\forall X \in \mathcal{C})\, x \notin X$

$x \notin \bigcap \mathcal{C} \iff (\exists X \in \mathcal{C})\, x \notin X$

$[A\cap B \subseteq \Gamma^c \wedge A\cup\Gamma \subseteq B] \Rightarrow A\cap\Gamma = \emptyset$

<u>Αποδ</u>

Έστω $A\cap\Gamma \neq 0$ θεωρώ ότι $x \in A\cap\Gamma$

$x = A\cap\Gamma \xrightarrow{A\cap\Gamma\subseteq A\cup\Gamma} x\in A\cup\Gamma \xrightarrow{A\cup\Gamma\subseteq B} x \in B$

$\overset{x\in A \}^*}{\Longrightarrow} x \in A\cap B \Rightarrow x\in\Gamma^c \Rightarrow x\notin\Gamma$ Άτοπο

Άλλα $A\cap\Gamma\subseteq A$ Άρα $x\in A$ (*)

$\mathcal{A}$ συλλογή συνόλων Ν.δ.ο

i) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A \subseteq \bigcup\mathcal{A} \wedge \bigcap\mathcal{A} \subseteq A$

ii) $\emptyset \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap\mathcal{A} = \emptyset$

$x\in A \Rightarrow (\exists X\in\mathcal{A})\, x\in X \iff x\in\bigcup\mathcal{A}$

$X = A$

$x\in\bigcap\mathcal{A} \iff (\forall X\in\mathcal{A})\, x\in X \overset{A\in\mathcal{A}}{\Longrightarrow} x\in A$

• $x \in A \wedge x \in B \iff P(x)$ αληθ $\wedge\ Q(x)$ αληθ $\Rightarrow$
$\Rightarrow P(x) \veebar Q(x)$ ψευδ

• $x \in A - B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \iff P(x)$ αληθ $\wedge\ Q(x)$ ψ $\Rightarrow$
$\Rightarrow P(x) \veebar Q(x)$ αληθ ✓

• $x \in B - A \iff x \notin A \wedge x \in B \iff$
$\iff P(x)$ ψευ $\wedge\ Q(x)$ αληθ $\Rightarrow$
$\Rightarrow P(x) \veebar Q(x)$ αληθ ✓

$x \notin A \wedge x \notin B \iff P(x)$ ψευδ $\wedge\ Q(x)$ ψευδ $\Rightarrow$
$\Rightarrow P(x) \veebar Q(x)$ ψευδ

$\{x : P(x) \veebar Q(x)\} = (A - B) \cup (B - A = A \dot{+} B$

→ ν.δ.ο
i) $A \dot{+} B = (A - B) \cup (B - A)$
ii) $A \dot{+} B = (A \cup B) - (A \cap B)$ ✓

$x \in A \dot{+} B \iff (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$

$\Gamma - (A \dot{+} B) =$

$x \in A \dot{+} B \iff (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$
$x \notin A \dot{+} B \iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \notin A \wedge x \notin B)$

C συλλογή συνόλων
$x \in \bigcup C \iff (\exists X \in C)\ x \in X$

$e_1 \subseteq e_2 \Rightarrow (\exists Y \in e_2)\ x \in Y$

X κ' Y είναι μέλη (στοιχεία) της διαμέρισης e_2 κ. με τομή διάφορη του $\varnothing$, αφού $x \in X$ και $y \in Y$
Άρα $X = Y$. Άρα $X \in e_1$

$A = \{x : P(x)\}$

$B = \{x : Q(x)\}$

$A \cap B = \{x : P(x) \wedge Q(x)\}$

$A \cup B = \{x : P(x) \vee Q(x)$

$A - B = \{x : P(x) \wedge \sim Q(x)\}$

$\underline{\vee}$ αποκλειστική διάζευξη

$\vee$ εγκλειστική διάζευξη

p	q	$p \underline{\vee} q$
α	α	ψ
α	ψ	α
ψ	ψ	α
ψ	ψ	ψ

$\{x : P(x) \underline{\vee} Q(x)\}$

$\{x : P(x) \Rightarrow Q(x)\}$

$\{x : P(x) \Leftarrow (\sim Q(x)\}$

$E = \{a, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$

$e = \{\{a\}, \{\beta\}, \{\beta, \gamma, \delta, \epsilon\}\}$

$\to \bigcup e = E \to$ κάλυψη

δεν είναι διαμέριση γιατί
είναι ξένα μεταξύ τους

• κάθε διαμέριση είναι και κάλυψη
το αντίστροφο δεν ισχύει

Προτ

Ας είναι $e_1 e_2$ διαμερίσεις του
ίδιου συνόλου E, με $e_1 \subseteq e_2$

Τότε ισχύει $e_1 = e_2$

Απόδ

Αρκεί ν.δ.ο $e_2 \subseteq e_1$

Έστω X τυχόν στοιχείο (σύνολο)

με $X \in e_2$. Θεωρούμε τυχόν στοιχείο
$x \in X$. Τότε $x \in X \subseteq \bigcup e_2$

Αλλά $\bigcup e_2 = \bigcup e_1 = E$. Άρα $x \in \bigcup e_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow (\exists Y \in e_1)\ x \in Y$